العناصر الهندسية الثابتة في نظرية $2F$ –تطبيقات بين فضاءات ريمان A_n– ذوات التركيب $(F)^3 = 0$

عبد الناصر أمين حيدر
قسم الرياضيات، كلية العلوم ،جامعة البعث - سوريا
DOI: https://doi.org/10.47372/uajnas.2017.n2.a06

الملخص

نُعرِّف في هذا البحث، فضاء ريمان ذو التركيب $(F)^3 = 0$. ثم نذكِّر بالشروط اللازمة والكافية لوجود **2F**- تطبيق $f: A_n \to \bar{A}_n$ بين فضائي ريمان $A_n , \bar{A}_n$ ذوي التركيب $(F)^3 = 0$.
ثم نجد العناصر الهندسية الموجودة ذاتها في فضاءات ريمان $A_n , \bar{A}_n$ المتواجد بينهما **2F**- تطبيق متوازٍ.

الكلمات المفتاحية: فضاء ريمان ذو التركيب $(F)^3 = 0$, **2F**- تطبيق متوازٍ.

مقدمة

تم دراسة فضاءات ريمان وشبه ريمان والعديد من التطبيقات بينها [**1-17**]
وتمَّ دراسة فضاءات ريمان A_n– ذوات التركيب: $(F)^3 = 0$ [**19**]
وقد أوجدت العلاقة بين رموز كريستوفل وتنسوري ريمان للفضائين $A_n , \bar{A}_n$ المتواجد بينهما ***2F***- تطبيق متوازٍ[**20**]. و تمّ تحديد العناصر الهندسية الثابتة بين فضاءات ريمان المحققة للشرط $(F)^3 = \pm 1$ والمتواجد بينها ***2F***- تطبيق متوازٍ[**18**].
نحاول في هذا البحث إيجاد العناصر الهندسية الثابتة في فضاءات ريمان المتواجد بينها **2F**- تطبيق متوازٍ.

هدف البحث:

يهدف البحث إلى إيجاد العناصر الهندسية الموجودة في فضائي ريمان $A_n , \bar{A}_n$ المتواجد بينهما 2F- تطبيق متوازٍ.

المناقشة والعمل:

- **تعريف** *(1)*:

نسمي فضاء ريمان ، A_n فضاءً ذا التركيب: $(F)^3 = 0$، إذا وُجِد فيه إلى جانب التنسور المتري g_{ij} ، تنسوراً $F_i^h(x)$ ؛ يحقق الخواص الآتية:

$$\begin{aligned}
&a)\quad F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = 0\\
&b)\quad F_i^\alpha g_{\alpha j} + F_j^\alpha g_{\alpha i} = 0\\
&c)\quad F_{i,j}^h = \partial_j F_i^h + F_i^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ij}^\alpha = 0\\
&d)\quad Rang\left(F_i^h\right) = m \quad , \quad m \geq 3
\end{aligned} \qquad (1)$$

حيث Γ_{ij}^h مركبات *كريستوفل من النوع الثاني:*

$$\partial_j F_i^h = \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j}$$

نعرّف في الفضاء A_n العمليات التنسورية الآتية:

$$\begin{aligned} &a) T_{\bar{i}}{}^{\cdots}_{\cdots} = F_i^{\alpha} T_{\alpha}{}^{\cdots}_{\cdots}\ , \\ &b) T^{\bar{i}}{}^{\cdots}_{\cdots} = F_{\alpha}^{i} T^{\alpha}{}^{\cdots}_{\cdots} \end{aligned} \qquad (2)$$

حيث إنَّ: $T_{\alpha}{}^{\cdots}_{\cdots}$ تنسوراً ما.

وتحقق الخواص الآتية:

$$\begin{aligned} &a) \quad T_{\bar{\bar{i}}}{}^{\cdots}_{\cdots} = T^{\bar{\bar{i}}}{}^{\cdots}_{\cdots} = 0, \\ &b) \quad T_{\bar{\alpha}}{}^{\cdots}_{\cdots} \cup^{\alpha}{}^{\cdots}_{\cdots} = T_{\alpha}{}^{\cdots}_{\cdots} \cup^{\bar{\alpha}}{}^{\cdots}_{\cdots} \qquad (3) \\ &c) \quad \left(T_{\bar{i}}{}^{\cdots}_{\cdots}\right)_{,j} = T_{\bar{i}}{}^{\cdots}_{\cdots,j}\ ,\ \left(T^{\bar{i}}{}^{\cdots}_{\cdots}\right)_{,j} = T^{\bar{i}}{}^{\cdots}_{\cdots,j} \end{aligned}$$

تُكتب العلاقة $(1,b)$، استناداً إلى (2)، على النحو:

$$g_{\bar{i}\,j} + g_{i\,\bar{j}} = 0 \qquad (4)$$

من الأخيرة نجد:

$$g^{\bar{i}\,j} + g^{i\,\bar{j}} = 0 \qquad (5)$$

حيث $g^{ij}(x)$ عناصر المصفوفة العكسية للمصفوفة $g_{ij}(x)$.

باقتران العلاقة (4) ، (5) بالدليل i ، نجد:

$$\begin{aligned} &g_{\bar{\bar{i}}\,j} + g_{\bar{i}\,\bar{j}} = 0 \\ &g^{\bar{\bar{i}}\,j} + g^{\bar{i}\,\bar{j}} = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

وأخيراً، باقتران العلاقة (6) بالدليل i مرة ثالثة، نجد:

$$\begin{aligned} &g_{\bar{\bar{\bar{i}}}\,j} + g_{\bar{\bar{i}}\,\bar{j}} = 0 \\ &g^{\bar{\bar{\bar{i}}}\,j} + g^{\bar{\bar{i}}\,\bar{j}} = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

من (7) ، وباعتبار أنَّ: $g_{\bar{\bar{\bar{i}}}\,j} = g^{\bar{\bar{\bar{i}}}\,j} = 0$ ، فإنّ:

$$g_{\bar{\bar{i}}\,\bar{j}} = g^{\bar{\bar{i}}\,\bar{j}} = 0 \qquad (8)$$

الآن، باعتبار: $F^h_{i,j} = 0$ ، فإنّ: $F^h_{i,jk} - F^h_{i,kj} = 0$ ، واستناداً إلى مطابقة ريتشي، من أجل تنسور ما من الشكل $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ نجد:

$$F_i^{\alpha} R^h_{\alpha jk} - F^h_{\alpha} R^{\alpha}_{ijk} = 0 \qquad (9)$$

حيث R^h_{ijk} تنسور ريمان كريستوفل.

تُكتب العلاقة (9)، استناداً إلى (2)، على النحو:

$$R^h_{\bar{i}\,jk} - R^{\bar{h}}_{ijk} = 0 \qquad (10)$$

وبتخفيض الدليل h في (10)، استناداً إلى خواص التنسور المتري g_{ij} ، نجد:

$$g_{\alpha h} R^{\alpha}_{\bar{i}\,jk} - g_{\alpha h} R^{\bar{\alpha}}_{ijk} = R_{h\bar{i}jk} - g_{\bar{\alpha}h} R^{\alpha}_{ijk} = R_{h\bar{i}jk} + g_{\alpha\bar{h}} R^{\alpha}_{ijk} = R_{h\bar{i}jk} + R_{\bar{h}ijk} = 0$$

أي أن

$$R_{\bar{h}ijk}+R_{h\bar{i}jk}=0 \qquad (11)$$

وباقتران الدليل h مرتين متتاليتين في (11)، نجد:

$$R_{\bar{\bar{h}}ijk}+R_{\bar{h}\bar{i}jk}=0$$

ومنه، نجد:

$$R_{\bar{\bar{h}}\bar{i}jk}=0 \qquad (12)$$

بضرب العلاقة (11) بـ g^{hk}، نجد:

$$g^{\alpha\beta}R_{\bar{\alpha}ij\beta}+R_{\bar{i}j}=0 \qquad (13)$$

حيث $R_{ij}=R^{\alpha}_{ij\alpha}$ تنسور ريتشي.

وبتطبيق عملية التناظر التنسوري على (13)أي المبادلة بين دليلين من أدلته السفلية ، واستناداً إلى الخاصة $(3,b)$ و (5)، نجد:

$$R_{\bar{i}j}+R_{i\bar{j}}=0 \qquad (14)$$

وباقتران العلاقة (14) مرتين متتاليتين للدليل i، واستناداً إلى $(1,a)$، نجد:

$$R_{\bar{\bar{i}}j}+R_{\bar{i}\bar{j}}=0$$

وباعتبار أنّ: $R_{\bar{\bar{i}}j}=0$ ، (استناداً إلى $(3,a)$) ، نجد أن:

$$R_{\bar{i}\bar{j}}=0 \qquad (15)$$

الآن، باعتبار أنّ: $F^{h}_{i,j}=0$ ، فإن البنية: $F^{h}_{i,j}$ قابلة للمكاملة، واستناداً إلى $(1,a)$، يوجد نظام إحداثي:

$$(x)=(x',.....,x^{n}) \quad ; \quad n=3m$$

بحيث مركبات التنسور تأخذ الشكل:

$$F^{h}_{i}=\left(\begin{array}{c|c|c} F^{a}_{b} & F^{a}_{b+m} & F^{a}_{b+2m} \\ \hline F^{a+m}_{b} & F^{a+m}_{b+m} & F^{a+m}_{b+2m} \\ \hline F^{a+2m}_{b} & F^{a+2m}_{b+m} & F^{a+2m}_{b+2m} \end{array}\right) =\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline E_{m} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -E_{m} & 0 \end{array}\right) \qquad (16)$$

حيث: E_{m} هي المصفوفة الواحدية التي رتبتها m ، و 0 هي المصفوفة الصفرية ذي المرتبة m.

- **<u>تعريف</u> (2):**

نسمي المنحني $\ell : x^{h}=x^{h}(t)$ في الفضاء A_{n} ذي التركيب $(F)^{3}=0$، $2F$ - منحن متوازٍ إذا بقي موازياً لنفسه بالانسحاب في النطاق المكون من المتجه $\lambda^{h}=\dfrac{dx^{h}}{dt}$ ، وقرينيّه:

$$\lambda^{\bar{h}}=\lambda^{h}F^{h}_{\alpha} \quad \text{وَ} \quad \lambda^{\bar{\bar{h}}}=\lambda^{h}F^{\beta}_{\alpha}F^{h}_{\beta}$$

أي إذا تحقق الشرط:

$$\frac{\partial\lambda^{h}}{dt}+\Gamma^{h}_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}=\rho_1(t)\lambda^{h}+\rho_2(t)\lambda^{\bar h}+\rho_3(t)\lambda^{\bar{\bar h}} \qquad (17)$$

حيث ρ_3,ρ_2,ρ_1 دوال ما في الوسيط t.

- **تعريف** *(3)*:

ليكن لدينا الفضاءان $A_n\left(g_{ij},\overset{1}{F}{}^{h}_{i},\overset{2}{F}{}^{h}_{i}\right)$, $\bar A_n\left(\bar g_{ij},\overset{1}{\bar F}{}^{h}_{i},\overset{2}{\bar F}{}^{h}_{i}\right)$ حيث إن: $\overset{1}{F}{}^{h}_{i}=F^{h}_{i}$, $\overset{2}{F}{}^{h}_{i}=F^{h}_{\alpha}F^{\alpha}_{i}$،

نسمي التماثل التفاضلي $f:A_n\longrightarrow\bar A_n$ ، *2F*- تطبيق متوازٍ ، إذا صوّر أي *2F*- منحنٍ متوازٍ من A_n بـ- *2F* منحنٍ متوازٍ في $\bar A_n$.

أثبتنا في [*21*] صحة كلٍ من المبرهنتين الآتيتين اللتين تحددان الشروط اللازمة والكافية لوجود *2F*- تطبيق متوازٍ.

- **مبرهنة** *(1)*:

الشرط اللازم والكافي لوجود *2F*- تطبيق متوازٍ من الفضاء $A_n\left(g_{ij},\Gamma^{h}_{ij},\overset{1}{F}{}^{h}_{i},\overset{2}{F}{}^{h}_{i}\right)$ إلى الفضاء $\bar A_n\left(\bar g_{ij},\bar\Gamma^{h}_{ij},\overset{1}{\bar F}{}^{h}_{i},\overset{2}{\bar F}{}^{h}_{i}\right)$ هو أن تتحقق العلاقات الآتية في أيّ نظام إحداثي مشترك $(x)=\left(x^1,....,x^n\right)$:

$$\begin{aligned} a)\ \ &\bar\Gamma^{h}_{ij}=\Gamma^{h}_{ij}+\psi_{(\bar{\bar i}}\delta^{h}_{j)}+\psi_{(\bar i}\overset{1}{F}{}^{h}_{j)}+\psi_{(i}\overset{2}{F}{}^{h}_{j)} \\ b)\ \ &\bar F^{h}_{i}=BF^{h}_{i} \end{aligned} \qquad (18)$$

حيث ψ_i متجه تدرج ، B ثابت ما.

- **مبرهنة (2):**

الشرط اللازم والكافي كي يوجد *2F*- تطبيق متوازٍ بين فضائي ريمان $\bar A_n\left(\bar g_{ij},\bar F^{h}_{i},\bar\Gamma^{h}_{ij}\right),A_n\left(g_{ij},F^{h}_{i},\Gamma^{h}_{ij}\right)$ هو أن تتحقق في A_n العلاقات:

$$\begin{aligned} a)\ \ &\bar g_{ij,k}=2\psi_{\bar{\bar k}}\bar g_{ij}+\psi_{(\bar{\bar i}}\bar g_{j)k}+\psi_{(\bar i}\overset{1}{F}_{j)k}+\psi_{(i}\overset{2}{F}_{j)k} \\ b)\ \ &\bar F_{ij}+\bar F_{ji}=0 \end{aligned} \qquad (19)$$

ووجدنا في [*20*] العلاقة بين تنسوري ريمان $\bar R^{h}_{ijk},R^{h}_{ijk}$ للفضائين $\bar A_n,A_n$ على الترتيب، المتواجد بينهما *2F*- تطبيق متوازٍ هي الآتية:

$$\begin{aligned} \bar R^{h}_{ijk}=R^{h}_{ijk}&+\psi_{\bar{\bar i}[j}\delta^{h}_{k]}+\psi_{\bar i[j}\overset{1}{F}{}^{h}_{k]}+\psi_{i[j}\overset{2}{F}{}^{h}_{k]}+ \\ &+\psi_{[\bar{\bar k}j]}\delta^{h}_{i}+\left(\psi_{k\bar j}-\psi_{j\bar k}\right)\overset{1}{F}{}^{h}_{i}+\left(\psi_{kj}-\psi_{jk}\right)\overset{2}{F}{}^{h}_{i} \end{aligned} \qquad (20)$$

والعلاقة بين تنسوري ريتشي $\bar R_{ij},R_{ij}$ هي الآتية:

$$\bar R_{ij}=R_{ij}+(n-3)\psi_{\bar{\bar i}j} \qquad (21)$$

نلاحظ من الأخيرة أنَ تنسوري ريتشي $\bar R_{ij},R_{ij}$ يحققان العلاقات:

$$\bar R_{\bar i j}=R_{\bar i j}=\bar R_{i\bar j}=R_{i\bar j} \qquad (22)$$

حيث:

$$\psi_{i\bar{\bar{j}}} = \psi_{i\alpha} F_{\beta}{}^{\alpha} F_{j}^{\beta} = \psi_{j\bar{\bar{i}}} = \psi_{\bar{\bar{i}}j} = -\psi_{\bar{i}\bar{j}} = -\psi_{\bar{j}\bar{i}} \qquad (23)$$

الآن، لنجد العناصر الهندسية الثابتة.

بالعودة إلى العلاقة (18) وبأخذ المرافق المزدوج للدليل j في طرفيها ، نجد أنّ:

$$\bar{\Gamma}^{h}_{i\bar{\bar{j}}} = \Gamma^{h}_{i\bar{\bar{j}}} + \psi_{0(i} \overset{2}{F}{}^{h}_{j)} \qquad (24)$$

حيث: $\psi_{0i} = \psi_{\bar{\bar{i}}}$.

وبتقليص الدليلين j, h في العلاقة (18) ، نجد أنّ:

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} + (n+3)\psi_{0i} \qquad (25)$$

ينتج من الأخيرة أنّ:

$$\psi_{0i} = \frac{1}{n+3}\left(\bar{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}\right) = \frac{1}{n+3}\partial_i \ln\sqrt{\frac{\bar{g}}{g}} \qquad (26)$$

حيث $\bar{g} = \det(\bar{g}_{ij})$ و $g = \det(g_{ij})$ التنسور المتري في الفضائين $A_n, \bar{A}_n$ على الترتيب.

تعني العلاقة (26) أنّ ψ_{0i} متجه تدرج ، أي تتحقق المساواة:

$$\psi_{0ij} = \psi_{0ji} \qquad (27)$$

بالتعويض عن ψ_{0i} من (26) في (24) نجد:

$$\bar{T}^{h}_{ij} = \underset{1}{T}{}^{h}_{ij} \qquad (28)$$

حيث:

$$T^{h}_{ij} = \Gamma^{h}_{i\bar{\bar{j}}} - \frac{1}{n+3}\overset{2}{F}{}^{h}_{(i}\,\Gamma^{\alpha}_{j)\alpha} \qquad (30)$$

الآن، بالعودة إلى (21) نلاحظ أنّ:

$$\psi_{\bar{\bar{i}}j} = \frac{\bar{R}_{ij} - R_{ij}}{n-3} \qquad (31)$$

بأخذ المرافق المزدوج للدليل k في العلاقة (20) استنادا الى $\delta^{h}_{\bar{\bar{i}}} = \overset{2}{F}{}^{h}_{i}$ والى أن

نجد: $\overset{1}{F}{}^{h}_{\bar{\bar{i}}} = \overset{2}{F}{}^{h}_{\bar{\bar{i}}} = \psi_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}} = 0$

$$\bar{R}^{h}_{ij\bar{\bar{k}}} = R^{h}_{ij\bar{\bar{k}}} + \psi_{\bar{\bar{i}}j}\overset{2}{F}{}^{h}_{k} - \psi_{i\bar{\bar{k}}}\overset{2}{F}{}^{h}_{j} \qquad (32)$$

أي إنّ:

$$\bar{R}^{h}_{ij\bar{\bar{k}}} = R^{h}_{ij\bar{\bar{k}}} + \left(\frac{\bar{R}_{ij} - R_{ij}}{n-3}\right)\overset{2}{F}{}^{h}_{k} - \left(\frac{\bar{R}_{ik} - R_{ik}}{n-3}\right)\overset{2}{F}{}^{h}_{j}$$

من هنا نجد أنّ:

$$\underset{2}{\bar{T}}{}^{h}_{ijk} = \underset{2}{T}{}^{h}_{ijk} \qquad (33)$$

حيث:

$$\underset{2}{T}{}_{ijk}^{h}=R_{ij\bar{\bar{k}}}^{h}-\frac{1}{(n-3)}\left(\bar{R}_{ij}\overset{2}{F}{}_{k}^{h}+R_{ik}\overset{2}{F}{}_{j}^{h}\right)\qquad(34)$$

الآن، بأخذ المرافق المزدوج للدليل i في العلاقة (20) نجد:

$$\bar{R}_{\bar{\bar{i}}jk}^{h}=R_{\bar{\bar{i}}jk}^{h}+\psi_{\bar{\bar{i}}j}\overset{2}{F}{}_{k}^{h}-\psi_{\bar{\bar{i}}k}\overset{2}{F}{}_{j}^{h}\qquad(35)$$

بطرح العلاقة (35) من (32) نجد:

$$\underset{3}{\bar{T}}{}_{ijk}^{h}=\underset{3}{T}{}_{ijk}^{h}\qquad(36)$$

حيث:

$$\underset{3}{T}{}_{ijk}^{h}=R_{\bar{\bar{i}}jk}^{h}-R_{ij\bar{\bar{k}}}^{h}\qquad(37)$$

بالتعويض عن $\psi_{\bar{\bar{i}}j}$ من (31) في (35) نجد:

$$\underset{4}{\bar{T}}{}_{ijk}^{h}=\underset{4}{T}{}_{ijk}^{h}\qquad(38)$$

حيث:

$$\underset{4}{T}{}_{ijk}^{h}=R_{\bar{\bar{i}}jk}^{h}-\frac{1}{(n-3)}\left(R_{ij}\overset{2}{F}{}_{k}^{h}-R_{ik}\overset{2}{F}{}_{j}^{h}\right)\qquad(39)$$

الآن، بالتعويض عن $\psi_{\bar{i}j}$ من (31) في (20) نجد:

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{T}}{}_{ijk}^{h}=&\underset{5}{T}{}_{ijk}^{h}+\psi_{\bar{i}j}\overset{1}{F}{}_{k}^{h}-\psi_{\bar{i}k}\overset{1}{F}{}_{j}^{h}+\psi_{ij}\overset{2}{F}{}_{k}^{h}-\psi_{ik}\overset{2}{F}{}_{j}^{h}+\\&+\left(\psi_{k\bar{j}}-\psi_{\bar{j}k}\right)\overset{1}{F}{}_{i}^{h}+\left(\psi_{kj}-\psi_{jk}\right)\overset{2}{F}{}_{i}^{h}\end{aligned}\qquad(40)$$

حيث:

$$\underset{5}{T}{}_{ijk}^{h}=R_{ijk}^{h}-\frac{1}{n-3}\left(\delta_{k}^{h}R_{ij}-\delta_{j}^{h}R_{ik}\right)\qquad(41)$$

وباعتبار أنّ $n>3$ نوجد المتجهات المستقلة خطياً:

$$\underset{1}{\varepsilon}_{i},\ \underset{2}{\varepsilon}_{i},\ \underset{3}{\varepsilon}_{i}\quad;\ (i=1,2,...,n)$$

وكذلك المتجهات المستقلة خطياً:

$$\underset{1}{\varepsilon}_{\bar{i}},\ \underset{2}{\varepsilon}_{\bar{i}},\ \underset{3}{\varepsilon}_{\bar{i}}\quad;\ (\bar{i}=1,2,...,n)$$

وكذلك المستقلة خطياً: $\underset{1}{\varepsilon}_{\bar{\bar{i}}},\ \underset{2}{\varepsilon}_{\bar{\bar{i}}},\ \underset{3}{\varepsilon}_{\bar{\bar{i}}}$

عندئذٍ يوجد المتجه $\overset{\alpha}{\xi}$ ، بحيث تتحقق الشروط:

$$\underset{1}{\overset{\alpha}{\xi}}\psi_{\bar{\bar{\alpha}}}=\underset{2}{\overset{\alpha}{\xi}}\psi_{\bar{\bar{\alpha}}}=\underset{3}{\overset{\alpha}{\xi}}\psi_{\bar{\bar{\alpha}}}=1$$

نضرب (40) بـ $\underset{\sigma}{\varepsilon}_{h}$ نجد استنادا الى (2) :

$$\begin{aligned}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\alpha}\underset{5}{\bar{T}}{}_{ijk}^{\alpha}=&\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\alpha}\underset{5}{T}{}_{ijk}^{\alpha}+\psi_{\bar{i}j}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{k}}-\psi_{\bar{i}k}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{j}}+\psi_{ij}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{\bar{k}}}-\psi_{ik}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{\bar{j}}}\\&+\left(\psi_{k\bar{j}}-\psi_{\bar{j}k}\right)\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{i}}+\left(\psi_{kj}-\psi_{jk}\right)\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{\bar{i}}}\end{aligned}\qquad(42)$$

بضرب (42) بـ $\overset{k}{\xi}$ نجد:

$$\underset{\sigma}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{ij*}=\underset{\sigma}{\varepsilon}\,{}_\alpha T_5{}^{\alpha}_{ij*}+\psi_{\bar i\bar j}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar *}-\psi_{\bar i*}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar j}+\psi_{ij}+\psi_{i*}\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{\bar j}} \\ +\left(\psi_{\bar *j}-\psi_{\bar j*}\right)\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar i}+\left(\psi_{*j}-\psi_{j*}\right)\underset{\sigma}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}} \qquad (43)$$

بتعويض σ بـ 1 و 2 في (43) وطرح العلاقتين الناتجتين:

$$\underset{4}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{ij*}=\underset{4}{\varepsilon}\,{}_\alpha T_5{}^{\alpha}_{ij*}+\psi_{\bar i\bar j}\underset{4}{\varepsilon}_{\bar *}-\psi_{\bar i*}\underset{4}{\varepsilon}_{\bar j} \\ +\psi_{i*}\underset{4}{\varepsilon}_{\bar{\bar j}}+\left(\psi_{\bar *j}-\psi_{\bar j*}\right)\underset{4}{\varepsilon}_{\bar i}+\left(\psi_{*j}-\psi_{j*}\right)\underset{4}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}} \qquad (44)$$

باعتبار أن $\underset{4}{\varepsilon}_{\bar *}\neq 0$ بالاختصار الأخيرة على $\underset{4}{\varepsilon}_{\bar *}$ نجد:

$$\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{ij*}=\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}\,{}_\alpha T_5{}^{\alpha}_{ij*}+\psi_{\bar i\bar j}+\psi_{\bar i*}\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}_{\bar j} \\ +\psi_{i*}\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}_{\bar{\bar j}}+\left(\psi_{\bar *j}-\psi_{\bar j*}\right)\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}_{\bar i}+\left(\psi_{*j}-\psi_{j*}\right)\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}_{\bar{\bar i}} \qquad (45)$$

حيث: $\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}_{i}=\dfrac{\underset{4}{\varepsilon}_{i}}{\underset{4}{\varepsilon}_{\bar *}}$ و $\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}_{\bar i}=\dfrac{\underset{4}{\varepsilon}_{\bar i}}{\underset{4}{\varepsilon}_{\bar *}}$ و $\underset{\tau}{\underset{5}{\varepsilon}}_{\bar{\bar i}}=\dfrac{\underset{4}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}}}{\underset{4}{\varepsilon}_{\bar *}}$.

بالتعويض في (45) عن τ بـ 6 و 7 وطرحهما نجد:

$$\underset{8}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{ij*}=\underset{8}{\varepsilon}\,{}_\alpha T_5{}^{\alpha}_{ij*}+\psi_{\bar i*}\underset{8}{\varepsilon}_{\bar j}+\psi_{i*}\underset{8}{\varepsilon}_{\bar{\bar j}} \\ +\left(\psi_{\bar *j}-\psi_{\bar j*}\right)\underset{8}{\varepsilon}_{\bar i}+\left(\psi_{*j}-\psi_{j*}\right)\underset{\tau}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}} \qquad (46)$$

وبما أن: $\underset{\bar j*}{\varepsilon}\neq 0$ يوجد $\eta^i\neq 0$ بحيث $\eta^\alpha\underset{\bar\alpha*}{\varepsilon}=1$.

بضرب (46) بـ η^i نجد:

$$\underset{8}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{io*}=\underset{8}{\varepsilon}\,{}_\alpha T_5{}^{\alpha}_{io*}+\psi_{\bar i*}+\psi_{i*}\underset{8}{\varepsilon}_{\bar{\bar *}}+ \\ +\left(\psi_{\bar *o}-\psi_{\bar o*}\right)\underset{8}{\varepsilon}_{\bar i}+\left(\psi_{*o}-\psi_{o*}\right)\underset{8}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}} \qquad (46)'$$

الأخيرة تكتب على النحو:

$$\underset{\lambda}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{io*}=\underset{\lambda}{\varepsilon}\,{}_\alpha T_5{}^{\alpha}_{io*}+\psi_{\bar i*}+\psi_{i*}\underset{\lambda}{\varepsilon}_{\bar{\bar *}}+ \\ +\left(\psi_{\bar *o}-\psi_{\bar o*}\right)\underset{\lambda}{\varepsilon}_{\bar i}+\left(\psi_{*o}-\psi_{o*}\right)\underset{\lambda}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}} \qquad (47)$$

بالتعويض في (47) عن λ بـ (8) ومرة أخرى بـ (9) وطرح العلاقتين نجد:

$$\underset{10}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{io*}=\underset{10}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{io*}+\psi_{i*}\underset{10}{\varepsilon}_{\bar *}+ \\ +\left(\psi_{\bar *o}-\psi_{\bar o*}\right)\underset{10}{\varepsilon}_{\bar i}+\left(\psi_{*o}-\psi_{o*}\right)\underset{10}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}} \qquad (48)$$

بالاختصار على $\underset{10}{\varepsilon}_{\bar *}\neq 0$ (أي بالتقسيم لطرفي العلاقة الأخيرة) نجد:

$$\underset{\delta}{\varepsilon}\,{}_\alpha\overline{T}_5{}^{\alpha}_{io*}=\underset{\delta}{\varepsilon}\,{}_\alpha T_5{}^{\alpha}_{io*}+\psi_{i*}+ \\ +\left(\psi_{\bar *o}-\psi_{\bar o*}\right)\underset{\delta}{\varepsilon}_{\bar i}+\left(\psi_{*o}-\psi_{o*}\right)\underset{\delta}{\varepsilon}_{\bar{\bar i}} \qquad (49)$$

بالتعويض في الأخيرة عن δ بـ 10 ومرة أخرى بـ 11 وبالطرح نجد:

$$\underset{12}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\bar{\boldsymbol{T}}}{}^{\alpha}_{\;io*}=\underset{12}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;io*}+\left(\psi_{\bar{*}o}-\psi_{\bar{o}*}\right)\underset{12}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}+\left(\psi_{*o}-\psi_{o*}\right)\underset{10}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{i}}} \qquad \textbf{(50)}$$

وباعتبار أن $\underset{12}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}\neq 0$ يوجد $\theta^{i}\neq 0$ بحيث $\theta^{i}\underset{12}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}=1$.

بضرب الأخيرة بـ θ^{i} نجد:

$$\underset{\Sigma}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\bar{\boldsymbol{T}}}{}^{\alpha}_{\;\bullet o*}=\theta^{\beta}\underset{\Sigma}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;\bullet o*}+\left(\psi_{\bar{*}o}-\psi_{\bar{o}*}\right)+\left(\psi_{\bar{*}o}-\psi_{o\bar{*}}\right)\underset{\Sigma}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{\bullet}}} \qquad \textbf{(51)}$$

وبالتعويض عن Σ في (*51*) بـ ***13*** و ***14*** وطرحهما نجد:

$$\theta^{\beta}\underset{15}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\bar{\boldsymbol{T}}}{}^{\alpha}_{\;\beta o*}=\theta^{\beta}\underset{15}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;\beta o*}+\left(\psi_{*o}-\psi_{o*}\right)\underset{15}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{\bullet}}} \qquad \textbf{(52)}$$

وباعتبار أن: $\underset{15}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{\bullet}}}\neq 0$ وبتقسيم الأخيرة عليه نجد:

$$\left(\psi_{*o}-\psi_{o*}\right)=\theta^{\beta}\left(\underset{15}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\bar{\boldsymbol{T}}}{}^{\alpha}_{\;\beta o*}-\underset{15}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;\beta o*}\right)=\bar{\boldsymbol{T}}_{6}-\boldsymbol{T}_{6} \qquad \textbf{(53)}$$

حيث:

$$\boldsymbol{T}_{6}=\theta^{\beta}\left(\underset{15}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;\beta o*}\right)$$

بتعويض (*53*) في (*51*) نجد:

$$\psi_{*o}-\psi_{o*}=\bar{\boldsymbol{T}}_{7}-\boldsymbol{T}_{7} \qquad \textbf{(54)}$$

حيث:

$$\boldsymbol{T}_{7}=\theta^{\beta}\left(\underset{12}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;\beta o*}\right)$$

نعوض (*54*) و (*53*) في (*49*) نجد:

$$\psi_{i*}=\underset{8}{\bar{\boldsymbol{T}}}{}_{i*}-\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{i*} \qquad \textbf{(54)}$$

حيث:

$$\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{i*}=\underset{\delta}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;io*}-\boldsymbol{T}_{6}\underset{\delta}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}-\underset{5}{\boldsymbol{T}}\,\varepsilon_{\bar{\bar{i}}} \qquad \textbf{(55)}$$

نعوض (*55*) ، (*54*) ، (*53*) في $'$(*46*) نجد:

$$\psi_{\bar{i}*}=\underset{9}{\bar{\boldsymbol{T}}}{}_{i*}-\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{i*} \qquad \textbf{(56)}$$

حيث:

$$\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{i*}=\underset{\beta}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;io*}-\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{i}-\boldsymbol{T}_{7}\underset{8}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}-\underset{7}{\boldsymbol{T}}\underset{8}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{i}}}$$

نعوض (**56**) ، (**55**) ، (**54**) ، (**53**) *في* (**45**) نجد:

$$\psi_{\bar{i}\bar{j}}=\underset{10}{\bar{\boldsymbol{T}}}{}_{ij}-\underset{10}{\boldsymbol{T}}{}_{ij} \qquad \textbf{(57)}$$

حيث:

$$\underset{10}{\boldsymbol{T}}{}_{ij}=\underset{\tau}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;ijk}-\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{i*}\left(\underset{\tau}{\varepsilon}{}_{\bar{j}}-\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{i*}\right)\varepsilon_{\bar{\bar{j}}}+\left(\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{*j}-\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{j*}\right)\underset{\tau}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}+$$
$$+\left(\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{*j}-\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{j*}\right)\underset{\tau}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{i}}}$$

نعوض (**57**) ، (**56**) ، (**55**) ، (**54**) ، (**53**) *في* (**43**) نجد:

$$\psi_{ij}=\bar{\boldsymbol{T}}{}_{ij}-\boldsymbol{T}{}_{ij} \qquad \textbf{(58)}$$

حيث:

$$\boldsymbol{T}{}_{ij}=\underset{\sigma}{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{5}{\boldsymbol{T}}{}^{\alpha}_{\;ij*}-\underset{10}{\boldsymbol{T}}{}_{ij}\underset{\sigma}{\varepsilon}{}_{\bar{*}}-\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{i*}\underset{\sigma}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}-\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{i*}\underset{\sigma}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{j}}}$$
$$+\left(\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{*j}-\underset{9}{\boldsymbol{T}}{}_{j*}\right)\underset{\sigma}{\varepsilon}{}_{\bar{i}}+\left(\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{*j}-\underset{8}{\boldsymbol{T}}{}_{j*}\right)\underset{\sigma}{\varepsilon}{}_{\bar{\bar{i}}}$$

نعوض (58) في (40) نجد:

$$\bar{T}^{h}_{ijk} = T^{h}_{ijk} \tag{59}$$

حيث:

$$\begin{aligned} T^{h}_{ijk} &= R^{h}_{ijk} - \frac{1}{n-3}\left(\delta^{h}_{k} R_{ij} - \delta^{h}_{j} R_{ik}\right) - P_{\bar{i}[j} F^{h}_{k]} + \\ &+ P_{i[j} \overset{2}{F}{}^{h}_{k]} + \left(P_{\bar{k}\bar{j}} - P_{\bar{j}k}\right) \overset{1}{F}{}^{h}_{i} + \left(P_{ij} - P_{ji}\right) \overset{2}{F}{}^{h}_{i} \end{aligned} \tag{60}$$

مما سبق نصل إلى صحة المبرهنة الآتية:

- **مبرهنة** *(3)*:

إنّ العناصر الهندسية الثابتة في **2F**- تطبيق متوازٍ بين فضاءات ريمان هي الموضحة في العلاقات:

(30) ، (33) ، (37) ، (39)، (60)

References

1- -Beklemishev D.V., (1965). Differential geometry of spaces with an almost complex structure , (Russian) , In : Itoge Nauki ,Geometria , 1963 . All-union Institute for Scientific and technical Information Moscow, 165-212.

2- Josef M. (1976).Geodesic mappings of Semisy metric Rimannian Spaces (Russian) Odessa. Univ. Moscow, Archives at VINITI 11. 11.76 No. 3924-76, 16p.

3- Josef M. (1979). Geodesic and holomorphically projective mappings of special Rimannian Space. (Russian) PHD. Thesis, Odessa Univ. 107P

4- Josef M.Geodesic,(1980). mappings of Einstein spaces . Math. Nothes ,28,922-923 ,1981; translation from Math . Zametki.28,935-938,.

5- Josef M. (1986). On Sasaki Spaces and Equidistant Kahler Spaces. Sov. Math, Dokl. 34, 428-431 (1987); DOKL. AKad. Nauk SSSR, 291, 33-36.

6- Josef M. (1998).Holomorphically projective mappings and their generalizations ,J. Math. Sci., New York.89,3 1334-1353

7- Kazem R, Kurbatova,I,N. (1990). Geometrical invariant element's in theory2F- mapping between Riemannian spaces A_n which have tensors $(F)^3 = \pm 1$, Ukrania ,Odessa,.

8- Kurbatova,I,N, (1990).On some questions geodesic mappings almost Hermation Spaces. Odessa -145. Named. Dok in Ukranuuite, 20.08.91 No. 1217-yk 91.

9- Otsuki T. and Tashiro Y., (1954). On curves in Kahlerian spaces, Math. J.Okayama Univ. 4 ,57-78 .

10- Petrov,A,Z.: (1966). New methods in general relativity theory. Moscow: Nauka, 495.,.

11- Prvanovic M., (1981) . A note in holomorphically projective transformations of the Kahler spaces , Tensor New Ser .35 99-104.

12- Shiha,M: (1993). On the theory of holomorphically projective mappings parabolically – kahlerian spaces . Diff. Geometry and its App. Conf. Opava ,157-160 ,.

13- Shiha,M.,the (1994).Holomorphicaly projective mappings of parabolically-Kahlerrian spaces(Russian) . Moscow.

14- Shiha,M.,Mikes .J. (2005). on holomorphically projective flat parabolically – Kahlerian spaces, Grant No 201/05/2707 CZEch Science Foundation and Council of Czech Government MSN No 6198959214 .

15- SHiha,M.(1994). Geodesicand Holomorphically-projective mappings of parabalically-Kahlerian spaces .(Russian) PHD . Moscow ,.

16-Shiha, M and Deban ,E.(2013). Riemannian Spaces A_n having structure $(F)^3 = 0$ jornal of Al Baath universityJornal number 35, 2013.

17-Vishnevsky V. V. , A. P. Shirokov, V. V. Shurigin, (1985). Spaces over Algebra, Kazan Univ. Press<, Kazan ,110-130.

18- Sinyukov. N. S. (1979). Geodesic Mappings of Riemannian Space, Hauka Moscow, P.255.

19-Sinyukova,E.N.Hop f–Bochner– Yano. (1988),method in the Theory of geodesic and holomorphically projective mappings. Ph. D. Thesis, Minsk.

Geometrical invariant element's in theory 2F- mapping between Riemannian spaces A_n which have tensors $(F)^3 = 0$

Abdelnaser A. Haider
Dept. of Maths, Faculty of Science , Al- Baath Univ. Syria
DOI: https://doi.org/10.47372/uajnas.2017.n2.a06

Abstract

In this paper we define Riemannian space that's exist in its tensor $(F)^3 = 0$, and remain the necessary and sufficient conditions in order to be exist 2F- mapping, between Riemannian spaces $\bar{A}_n$, A_n which have tensors $(F)^3 = 0$ later fined Geometrical invariant element's in 2F mapping between Riemannian spaces $\bar{A}_n$, A_n with have tensors $(F)^3 = 0$.

Key words: *Riemannian space of tensor,* $(F)^3 = 0$, *2F- mapping*